Exercice 1 — 6 points

Dans cet exercice, tous les résultats seront arrondis à 10^{-3} près en cas de besoin.
Les deux parties de cet exercice sont indépendantes l'une de l'autre.

Partie A

Au tennis, le joueur qui est au service peut, en cas d'échec lors du premier service, servir une deuxième balle.
En match, Abel réussit son premier service dans 70 % des cas. Lorsque le premier service est réussi, il gagne le point dans 80 % des cas.
En revanche, après un échec à son premier service, Abel gagne le point dans 45 % des cas.

Abel est au service.
On considère les évènements suivants :

- S : « Abel réussit son premier service »
- G : « Abel gagne le point ».

1. Décrire l'évènement $\overline{S}$ puis traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer $P(S \cap G)$.
3. Justifier que la probabilité de l'évènement G est égale à $0,695$.
4. Abel a gagné le point. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi son premier service ?
5. Les évènements S et G sont-ils indépendants ? Justifier.

Partie B

À la sortie d'une usine de fabrication de balles de tennis, une balle est jugée conforme dans 85 % des cas.

1. On teste successivement 20 balles. On considère que le nombre de balles est suffisamment grand pour assimiler ces tests à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de balles conformes parmi les 20 testées.
   a. Quelle est la loi suivie par X et quels sont ses paramètres ? Justifier.
   b. Calculer $P(X \leqslant 18)$.
   c. Quelle est la probabilité qu'au moins deux balles ne soient pas conformes parmi les 20 balles testées ?
   d. Déterminer l'espérance de X.
2. On teste maintenant n balles successivement. On considère les n tests comme un échantillon de n variables aléatoires X indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $0,85$.
   On considère la variable aléatoire

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n} = \frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \frac{X_3}{n} + \ldots + \frac{X_n}{n}$$

a. Déterminer l'espérance et la variance de M_n.

b. Après avoir rappelé l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que, pour tout entier naturel n, $P(0,75 < M_n < 0,95) \geqslant 1 - \dfrac{12,75}{n}$.

c. En déduire un entier n tel que la moyenne du nombre de balles conformes pour un échantillon de taille n appartienne à l'intervalle $]0,75\,;\,0,95\,[$ avec une probabilité supérieure à $0,9$.